

René Descartes'i heksahordide akustilisest ehitusest

Mart Humal

Abstract

As we know, the medieval system of solmization is based on hexachords which correspond to the first six degrees of the modern major key. Its tones have been designated as solmization syllables *ut-re-mi-fa-sol-la*. According to the theory outlined in the treatise *Compendium musicae* (1618) by the French philosopher and mathematician René Descartes (1596–1650), the interval *ut* to *re* must always be a minor whole-tone (9:10), *re* to *mi* a major whole-tone (8:9), *mi* to *fa* a major semitone (15:16), *fa* to *sol* a major whole-tone, and finally *sol* to *la* a minor whole-tone.

Among the notes of the English physicist and mathematician Isaac Newton dated 1665, there is a diagram, which, probably following one of Descartes's examples, represents five hexachords. In these, Descartes's figures marking string lengths are replaced by figures marking units of the 53-division of the octave, having the size of 22.6 cents. In this study, all the Descartes hexachords possible in the 53-division are discussed and compared with those of John Hothby (?–1487) and Gioseffo Zarlino (1517–1590).

1. Sissejuhatuseks

Teatavasti on keskaegse solmisatsioonisüsteemi aluseks tänapäeva mažoorhelistiku esimesele kuuetele astmele vastav nn. mažoorheksahord, näiteks *c–d–e–f–g–a*. See on ilma tritoonita helirida, mille kõik naaberhelid on üksteisest täistooni kaugusel, välja arvatud kaks keskmist, üksteisest pooltooni kaugusel olevat heli. Selle helisid, sõltumata nende absoluutkõrgusest, tähistatakse silpnimetustega *ut–re–mi–fa–sol–la*. Diatoonilises helireas võimalikule kahele mažoorheksahordile *c–a* (*hexachordum naturale*) ja *g–e* (*hexachordum durum*) lisati peagi veel üks heksahord *f–d* (*hexachordum molle*), mis muutis kasutatava diatoonilise helirea sisuliselt kaheksaheliliseks (*c–d–e–f–g–a–b–h*). Kui meloodia ulatus ületab heksahordi piiri, kasutati selle solfedžerimisel nn. mutatsiooni, üleminekut ühelt heksahordilt teisele.

Käesolevas artiklis on vaadeldud prantsuse filosoofi ja matemaatiku René Descartes'i heksahorditeooriat ning võrreldud seda 15.–16. sajandi muusikateoreetikute John Hothby ja Gioseffo Zarlino teooriatega. Isaac Newtoni ideed edasi arendades ja Descartes'i enda kirjeldust jätkates on uuritud, kuidas sobituvad Descartes'i heksahordid 53-helilisse võrdtempereeritud häälestusse ja kui palju uusi helisid seal eri transpositsioonides lisandub.

Kuni 15. sajandini valitses Euroopa muusikas nn. pütaagorlik häälestus, mis tugines puhastele kvintidele ja kvartidele, vastavalt võnkesagedus-

suhtega 3:2 (701,95 senti) ja 4:3 (498,05 senti), ning kus kasutati ainult nn. suuri täistoone võnkesagedussuhtega 8:9 (203,91 senti) ja pooltoone võnkesagedussuhtega 243:256 (nn. väike limma, 90,22 senti). Erinevalt loomulikest, ülemhelireas sisalduvatest suurtest ja väikestest tertsidest, vastavalt võnkesagedussuhtega 4:5 (386,31 senti) ja 5:6 (315,65 senti), kasutati seal nn. pütaagorlikke suuri ja väikesi tertse, vastavalt võnkesagedussuhtega 64:81 (407,82 senti) ja 27:32 (294,13 senti), mis muuseas on tänapäeva 12-helilisele võrdtempereeritud häälestusele umbes poole lähemal kui loomulikud tertsid. Sama kehtib ka sekstide kohta.

Alates 16. sajandist seevastu otsiti erinevaid nn. puhta häälestuse võimalusi, kus eelmainitud pütaagorlikele konsonantsidele lisandusid ka loomulikud tertsid ja sekstid, mistõttu lisaks suurtele täistoonidele tulid kasutusele ka väikesed täistoonid võnkesagedussuhtega 9:10 (182,40 senti). Katsetati mitmesuguseid ebavõrdselt tempereeritud häälestusi; neist tuntuim on nn. kesktoonhäälestus, kus osa täistoone olid suure ja väikese vahepealsed. Saavutamaks maksimaalselt puhtaid kvinte ja tertse, kasutati ka mitmesuguseid paljuhelilisi häälestussüsteeme, kus oktavis on rohkem kui 12 heli, sealhulgas 19-, 31- ja 53-helilisi võrdtempereeritud häälestusi.

Käesolevas artiklis ongi Isaac Newtoni eeskujul¹ kasutatud eri suurusega intervallide ja heksahordiaastmete võrdlemiseks oktava jagamisel

¹ Vt. näide 9.

53 võrdseks osaks tekkiva 53-helilise võrdtempereeritud häälestuse ühikut suurusega 22,6415 (ehk 1200/53) või ümardatult 22,6 senti, mis on 1/53 puhtast oktavist.² Kuna see suurus, mida on nimetatud ka kunstlikuks kommaks (*artificial comma*; Holder 1694: 104, vt. Lindley 1987: 211), on ligikaudu süntoonilise komma (21,506 senti)³ ja Pythagorase komma (23,460 senti)⁴ aritmeetiline keskmine, nimetagem seda tinglikult kommaühikuks. Kõnesolevas häälestuses leiduv 31 kommaühikust koosnev kvint suurusega 701,890 senti on ainult 0,065 senti väiksem kui puhas (pütaagorlik) kvint, mistõttu seda häälestust võib pidada paljuheliiseks pütaagorlikuks häälestuseks. Samas sisaldab see ka praktiliselt puhtaid loomulikke tertse ja sekste, seda tänu asjaolule, et kaheksas puhas kvint (pütaagorlik suurendatud kvint; 815,64 senti) on ainult 1,95 senti suurem kui loomulik väike sekst (813,69 senti); 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses on see vahe veeli väiksem, nimelt 1,53 senti. Samapalju erineb ka kaheksas puhas kvart (pütaagorlik vähendatud kvart) loomulikust suurest tertsist. Seetõttu võib kõiki 53-helilisele võrdtempereeritud häälestuse helisid tähistada enharmooniliselt identsete helipaaridena, näiteks *his/C*, kus *C* ühtib noodist *Gis* võetud suure tertsiga *his*.

Noodinimetusi on järgnevalt kasutatud 19. sajandi muusikateoreetiku Moritz Hauptmanni (1792–1868) eeskujul, kes oma traktaadis „Die Natur der Harmonik und Metrik“ (Hauptmann 1853) tähistas mažoorhelistiku põhikolmkõlade (toonika, dominandi ja subdominandi) priime ning kvinte suure, tertse aga väikese tähega, näiteks *C*-duuris *C–e–G*, *G–h–D* ja *F–a–C*. Iga suure tähega märgitud heli on samanimelisest väikese tähega märgitud helist ühe kommaühiku võrra kõrgem.

Järgnevas loetelus on märgitud, mitmest kommaühikust koosnevad mõningad 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses leiduvad intervallid: väike sekst võnkesagedussuhtega 15:16 – 5; väike täistoon võnkesagedussuhtega 9:10 – 8; suur täistoon võnkesagedussuhtega 8:9 – 9; väike terts võnkesagedussuhtega 6:5 – 14; suur terts

võnkesagedussuhtega 4:5 – 17; kvart võnkesagedussuhtega 3:4 – 22; kvint võnkesagedussuhtega 2:3 – 31; suur sekst võnkesagedussuhtega 3:5 – 39. Eelmainitud pütaagorlikud tertsid ja sekstid on nendest ühe kommaühiku võrra kas suuremad või väiksemad.

2. Descartes'i heksahorditeooria

Prantsuse filosoof ja matemaatik René Descartes (1596–1650) kirjutas 1618. aastal oma esimese lõpetatud tööna ladinakeelse traktaadi „Compendium musicae“ (Descartes 1961). Teos polnud mõeldud trüki avaldamiseks ja ilmus alles postuumselt 1650. aastal (Descartes 1650); selle käsikirja kinkis autor oma sõbrale, hollandi matemaatikule Isaac Beeckmanile (1588–1637). Raamat koosneb sissejuhatavast *Praenotanda*'st ja ühe-teistkümnest lühikesest peatükist, mis käsitlevad eelkõige kvantitatiivseid suhteid muusikas.

Descartes'i heksahorditeooria pole teadaolevalt seni erilist tähelepanu pälvinud. Seoses prantsuse muusikateooria ajalooa märgib Wilhelm Seidel vaid:

Midagi olulist ei paku Descartes'i märkused [...] heksahordidest [...]. Siiski võib ka siin märgata soovi tavapäraseid reegleid ja praktikat senisest paremini põhjendada. Näiteks seostab Descartes heksahorditeooria aritmeetilise süsteemiteooriaga ja usub suutvat sealäbi seletada, mispärast praktikas on mõistlik piirduda kolme heksahordiga. (Seidel 1986: 53).

Heksahordidest on juttu traktaadi kõige pikemas peatükis „Astmed ehk helid muusikas“,⁵ kusjuures Descartes nimetab eelmainitud kolme heksahordi (*naturale*, *durum* ja *molle*) vastavalt *vox naturalis*, *vox h* ja *vox b mollis* (Lindley 1987: 211). Autor kirjutab:

Eelnevast selgub, et helijärgnevus, mida tegevmuusikud kutsuvad „[Guido] käeks“,⁶ sisaldab kõiki võimalikke astmete korraldamise viise. [...] Selle mõistmiseks tuleb teada, et

² Vt. ka Humal 2009.

³ Süntooniline (Didymose) komma on suurus, mille võrra on neli puhas kvinti kokku suuremad kui kaks oktavit pluss loomulik suur terts.

⁴ Pythagorase komma on suurus, mille võrra on puhas „pütaagorlik“ kvindiring suurem kui seitse oktavit.

⁵ „De Gradibus sive Tonis Musicis“ (Descartes 1650: 26–43); „The Steps or Musical Tones“ (Descartes 1961: 28–43).

⁶ Guido käsi (manus Guidonis) on keskajal ja hiljemgi kasutatud abivahend helisüsteemi (sealhulgas heksahordide) näitlikustamiseks, mille puhul iga heli on seostatud teatud punktiga vasaku käe peopesal.

„käsi“ algab heliga *f*, mida me seetõttu määrgime suurima numbriga,⁷ näitamaks, et see on madalaim heli. See on tõestatavalt nii sellepärast, et terve oktava jaotust võib alustada ainult kahest kohast, nimelt (1) sealt, kus algul on kaks täistooni, seejärel pooltoon ja lõpuks kolm täistooni, või (2) sealt, kus algul on kolm täistooni ja lõpus ainult kaks. Tegelikult esindab heli *f* neid kahte kohta üheaegselt, sest kui me tõuseme sellest helist lähtuvalt läbi *b* [*mollis'*e], on algul ainult kaks täistooni, kui aga läbi *[b]* ♯, on neid kolm.⁸

I. Seetõttu on eelneva näite ja varasematest näidetest teise põhjal ilmne, et terves oktavis on ainult viis astet, mille kaudu saab üles liikuda loomulikul viisil [s.t. *hexachordum naturale* helidel] – seega ilma lisa- ja muutlike helideta. Viimased tulevad kasutusele kunstlikult [s.t. *hexachordum durum'*i ja *hexachordum molle* puhul], võimaldamaks edasisi jaotusi; seega moodustavad need viis intervalli helirea, ja neid märgitakse nimedega *ut, re, mi, fa, sol, la*.⁹

II. Edasi on ilmne, et *ut* ja *re* vahel peab alati olema väike täistoon, *re* ja *mi* vahel suur täistoon, *mi* ja *fa* vahel suur pooltoon, *fa* ja *sol*'i vahel suur täistoon ja lõpuks *sol*'i ja *la* vahel väike täistoon.¹⁰

III. Võib olla ainult kahte liiki kunstlikke [s.t. ainult kahes ülejäänud heksahordis leiduvaid] noote, ja nimelt *b* [*molle*] ja *[b]* ♯, sest helide *a* ja *c* vahemikku, mis loomulikul viisil [*hexachordum naturale* puhul] jääb jaotamata, saab jaotada ainult kahel viisil, olenevalt sellest, kas võtta pooltoon esimeseks või teiseks [intervalliks].¹¹

IV. On ilmne, miks neis kunstlikes heliridades [s.t. *hexachordum durum'*i ja *hexachordum molle* puhul] korduvad ikka ja jälle noodid *ut, re, mi, fa, sol, la*. Sest kui näiteks liiguksime noodilt *a* noodile *b* [*molle*] ja kui pole teisi helisid, mis tekitaksid suurt pooltooni *mi–fa*, siis järelikult tuleks *a* puhul kasutada nimetust *mi* ja *b* [*molle*] puhul nimetust *fa*, ning nii ka mujal, vastavalt järjekorrale.¹²

Lõpuks on ilmne, et mutatsioon ühest helireast [s.t. heksahordist] teise teostatakse neile mõlemale ühiste helide kaudu; samuti et need heliread [s.t. heksahordid] asetsevad teineteisest kvindi kaugusel, kusjuures *vox b mollis* [*hexachordum molle*] on neist madalaim. [---]. *Vox naturalis* [*hexachordum naturale*] peab asetsema keskel [---]. Lõpuks tuleb *vox ♯* [*hexachordum durum*]. [---] See on kõrgeim ja paikneb *vox b mollis'*e [*hexachordum molle*] suhtes vastupidiselt.¹³

⁷ Jutt on pikimast keelest või monohordi pikimast lõigust, mis vastab madalaimale helile.

⁸ „Patet secundo ex dictis illum tonorum ordinem, quem practici manum vocant, omnes modos quibus gradus ordinari possunt continere [---]: ad hujus, tamen intelligentiam notandum est, illam incipere à termino F, ubi idcirco numerum maximum adhibuimus, ut pateret illum terminum omnium esse gravissimum, probatur autem ita esse debere ex eo, quod à duobus tantum locis totius octave divisiones possimus inchoare, ita scilicet ut in illa vel primo loco duo toni ponantur, & post unum semitonium 3. toni consequentes ultimo loco, vel contra ut 3. toni primo loco ponantur & duo tantum ultimo, atqui terminus F illa duo loca simul repræsentat, si enim ab illo per b incedamus, duo tantum sunt toni primo loco, si vero per ♯ erunt tres.“ (Descartes 1650: 34–36).

⁹ „Jam igitur patet primo ex hac figura & ex secunda superiori quinque tantummodo spatia in tota octava contineri, per quæ vox naturaliter procedat, hoc est sine ulla fractione & mobili termino, qui arte inveniendus fuit ut ulterius progredieretur, unde factum est ut illa quinque intervalla naturali voci tribuerentur, & sex tantum voces inventæ sint ad illa explicanda; nempe, *ut, re, mi, fa, sol, la*.“ (Descartes 1650: 36).

¹⁰ „Patet 2^o. ab *ut* ad *re* semper esse tonum minorem, à *re* ad *mi* semper tonum majorem, à *mi* ad *fa* semper semitonium majus, à *fa* ad *sol* semper tonum majorem, ac denique à *sol* ad *la* tonum minorem.“ (Descartes 1650: 36). See on Charles Kenti sõnul „üks 'puhta' mažoorheksahordi tüüpe“ (Descartes 1961: 37, märkus 43). Täpsemalt öeldes on see ainus suurtest ja väikestest täistoonidest ning suurtest pooltoonidest koosnev mažoorheksahord, kus on ainult üks ebapuhas konsonants kvart *re–sol*).

¹¹ „Patet 3^o. duo tantum esse posse genera vocis artificialis, nempe *b* & ♯, quia scilicet spatium inter A & C, quod à voce naturali non dividitur, potest tantum dividi duobus modis, ita scilicet ut semitonium ponatur primo loco vel secundo.“ (Descartes 1650: 36).

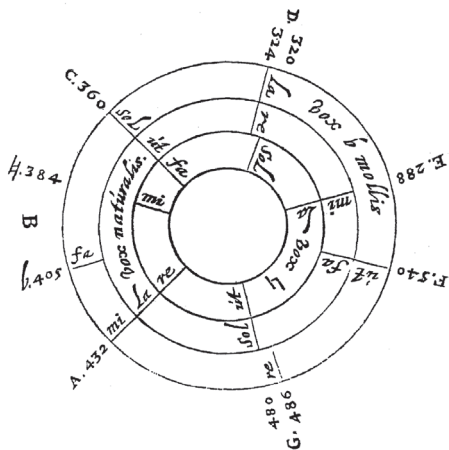
¹² „Patet 4^o. quare in illis vocibus artificialibus iterum note, *ut, re, mi, fa, sol, la*, repetantur; cum enim verbi gratia ab A ad *b* ascendimus, cum non alie sint note que semitonium majus significant quam *mi* & *fa*, inde sequitur in A ponendum esse *mi*, in *b* autem *fa*, & ita in aliis locis ordine est dicendum.“ (Samas).

¹³ „Patet denique quomodo fiant mutationes ab una voce ad alteram, nempe per terminos duabus vocibus communes: preterea has voces distare quinta ab invicem, atque vocem *b mollis* omnium esse gravissimam [---], vox autem naturalis media est [---], denique vox ♯ [---], quia acutissima est & *b* molli opposita.“ (Descartes 1650: 37).

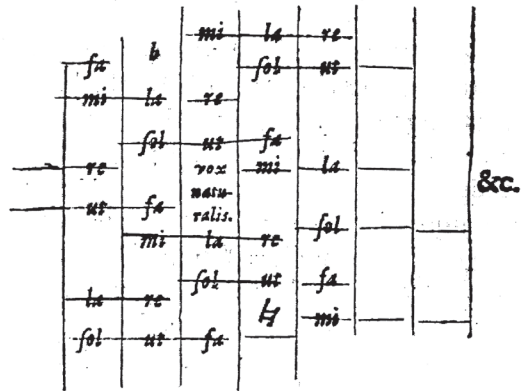
Võiks arvata, et „[Guido] käsi” pole piisav ega sisalda kõiki vajalikke mutatsioone [---] ja et oleks vaja veel teisi jaotusi, nagu on kujutatud järgnevas näites [näide 2]. [---]

Kuid ma väidan vastu, et sel viisil võime jätkata *ad infinitum* ja et eelmainitud „käsi” märgib ainult ühesainsas meloodias toimuvaid muudatusi. Kõik need muudatused sisalduvad kolmes helireas [s.t. heksahordis], sest igapähe on ainult kuus nooti; neist kaks muutuvad üleminekul järgmisesse heliritta [s.t. heksahordi] ja esialgseist jäävad alles ainult neli. Kuid edasisel üleminekul kolmandasse heliritta [s.t. heksahordi] muutuvad esialgsest neljast veel kaks nooti; nii jäävad alles ainult kaks esimeses helireas [s.t. heksahordis] olnud heli. Neljandas helireas [s.t. heksahordis] kaovad needki [---], nagu on kujutatud näites [2].¹⁴ Seega on ilmne, et see ei ole enam sama *cantilena*,¹⁵ milles me alustasime, sest ükski heli ei ole jäänud samaks.¹⁶ (Descartes 1961: 35–39).

Näide 1. Descartes'i heksahordide diagramm tema traktaadi esimesest trükist (1650) (Lindley 1987: 208).



Näide 2. Descartes'i B-, F-, C-, G- ja D-heksahordid (Descartes 1650: 38).



3. John Hothby heksahordid

Descartes'i heksahorditeooriat on huvitav võrrelda Itaalias tegutsenud inglase munga John Hothby (?–1487) omaga. Viimane esitab oma käsi- kirjalises traktaadis „Calliopea legale” omapärase heksahorditeooria (Rempp 1989: 60). Jättes ära *hexachordum molle*, transponeeris ta *hexachordum durum*'it pütaagorlikus häälestuses järjekindlalt kvintide kaupa üles kuni *fis*'ini ja *hexachordum naturale*'t kvintide kaupa alla kuni *des*'ini, saades näites 3 kujutatud helisüsteemi. Pütaagorliku häälestuse tõttu tekivad heksahordides naaberhelide vahel ainult suured täistoonid (9 kommaühikut) ja väikesed limmad (4 kommaühikut).

Näites 4 on loetletud kõigi kaheteistkümne John Hothby heksahordi helid vastavalt 53-helilise võrdtempereeritud häälestuse astmetele. Loetelu algul olev *hexachordum naturale* on lähtepunkt, millele järgnevad vaheldumisi kuus tõusva

¹⁴ Näites 2 on kolmele traditsioonilisele heksahordile lisatud veel ja B- ja D-heksahordid, vastavalt esimese ja viimasena.

¹⁵ Walter Roberti tõlkes: „this would not be the same key” („see ei ole enam sama helistik”; Descartes 1961: 38). Mujal kasutab ta *cantilena* vastetena sõnu *composition* (teos), *melody* (meloodia), *tune* (viis), *piece* (pala), *music* (muusika) ja *counterpoint* (kontrapunkt).

¹⁶ „Sed obijciat forte aliquis hanc manum non sufficere ut omnes graduum mutationes in se contineat [---], ita deberent etiam in ea alii utrimque ordines adhiberi, quales in sequenti figura positi sunt [---].”

Sed respondeo hoc pacto fore progressum in infinitum, in illa autem manu debuisse tentum unius cantilenæ mutationes exprimi: atqui illos intra tres ordines contineri demonstratur ex eo, quod in uno quoque ordine sex tantum termini contineantur, quorum duo mutantur dum fit mutatio ad sequentem ordinem, & ita in illo remanent tantum 4^{or}. termini ex iis qui erant in priori, quod si rursus ad tertium ordinem fiat transitus, duo iterum gradus ex 4^{or}. precedentibus mutabuntur, & ita remanebunt tantum duo ex iis qui erant in priori ordine, qui denique tollerentur in quarto ordine, si ad illum usque fieret progressio, ut patet in figura: unde evidentissimum est non fore tunc eandem cantilenam que fuisset initio, cum nullus in ea terminus idem remaneat.” (Descartes 1650: 37–39).

Näide 3. John Hothby heksahordid (Rempp 1989: 81).

Mi – Fa	Hexachord	Name	Ordnung
h – C	G – E	duro	1 ^o ordine
E – F	C – A	naturale	
A – B	F – D	1 ^a schiera	2 ^{do} ordine col primo
C – Des	As – F	2 ^{da} schiera	
D – Es	B – G	3 ^a schiera	
F – Ges	Des – B	4 ^a schiera	
G – As	Es – C	5 ^a schiera	
Ais – H	Fis – Dis	1 ^a schiera	3 ^o ordine col primo
Cis – D	A – Fis	2 ^{da} schiera	
Dis – E	H – Gis	3 ^a schiera	
Fis – G	D – H	4 ^a schiera	
Gis – A	E – Cis	5 ^a schiera	

ja viis laskuva kvindireana järjestatud heksahordi (viimaste järjekorranumbrid on miinusmärgiga). Iga rea algul olev järjekorranumber näitab, mitme kvindi võrra vastava heksahordi algusnoot on kõrgem või madalam ülareas oleva *hexachordum naturale* algushelist. Vastava heli tähtnimetusele eelnevad kommaühikud, arvatuna *modulo 53*, selle järele on märgitud sulgudes selle kaugus sentides ülarea algushelist. Igas reas lisanduv uus heli on alla kriipsutatud. Pütaagorliku (puhastes kvintides) häälestuse tõttu on kõik noodinimetu-

sed kirjutatud suure tähega, vastavalt eelmainitud Moritz Hauptmanni tähistusviisile.

Kuna iga heksahordi helid moodustavad osa katkematust kvindireast (näiteks ülareas olev *hexachordum naturale F–C–G–D–A–E*), siis lisandub igas järgmises heksahordis ainult üks uus heli – tõusva või laskuva kvindirea järgmine heli.

Näites 5 on kõik John Hothby heksahordides leiduvad helid paigutatud tõusva ja laskuva kvindireana ja näites 6 kromaatilisel tõusva helireana.¹⁷

Näide 4. John Hothby heksahordid 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses.

0.	0 C (0,0)	9 D (203,8)	18 E (407,5)	22 F (498,1)	31 G (701,9)	40 A (905,7)
1.	31 G (701,9)	40 A (905,7)	49 H (1109,4)	0 C (0,0)	9 D (203,8)	18 E (407,5)
-1.	22 F (498,1)	31 G (701,9)	40 A (905,7)	44 B (996,2)	0 C (0,0)	9 D (203,8)
2.	9 D (203,8)	18 E (407,5)	27 Fis (611,3)	31 G (701,9)	40 A (905,7)	49 H (1109,4)
-2.	44 B (996,2)	0 C (0,0)	9 D (203,8)	13 Es (294,3)	22 F (498,1)	31 G (701,9)
3.	40 A (905,7)	49 H (1109,4)	5 Cis (113,2)	9 D (203,8)	18 E (407,5)	27 Fis (611,3)
-3.	13 Es (294,3)	22 F (498,1)	31 G (701,9)	35 As (792,5)	44 B (996,2)	0 C (0,0)
4.	18 E (407,5)	27 Fis (611,3)	36 Gis (815,2)	40 A (905,7)	49 H (1109,4)	5 Cis (113,2)
-4.	35 As (792,5)	44 B (996,2)	0 C (0,0)	4 Des (90,6)	13 Es (294,3)	22 F (498,1)
5.	49 H (1109,4)	5 Cis (113,2)	14 Dis (317,0)	18 E (407,5)	27 Fis (611,3)	36 Gis (815,2)
-5.	4 Des (90,6)	13 Es (294,3)	22 F (498,1)	26 Ges (588,7)	35 As (792,5)	44 B (996,2)
6.	27 Fis (611,3)	36 Gis (815,2)	45 Ais (1018,9)	49 H (1109,4)	5 Cis (113,2)	14 Dis (317,0)

¹⁷ Viimase noodinimetused leiduvad samas (Rempp 1989: 81).

Näide 5. John Hothby heksahordide helid kvindiridadena.

0. 0 C (0,0), **1.** 31 G (701,9), **2.** 9 D (203,8), **3.** 40 A (905,7), **4.** 18 E (407,5), **5.** 49 H (1109,4), **6.** 27 Fis (611,3), **7.** 5 Cis (113,2), **8.** 36 Gis (815,2), **9.** 14 Dis (317,0), **10.** 45 Ais (1018,9).

0. 0 C (0,0), **-1.** 22 F (498,1), **-2.** 44 B (996,2), **-3.** 13 Es (294,3), **-4.** 35 As (792,5), **-5.** 4 Des (90,6), **-6.** 26 Ges (588,7).

Näide 6. John Hothby heksahordide helikoostis.

0 C (0,0), **4** Des (90,6), **5** Cis (113,2), **9** D (203,8), **13** Es (294,3), **14** Dis (317,0), **18** E (407,5), **22** F (498,1), **26** Ges (588,7), **27** Fis (611,3), **31** G (701,9), **35** As (792,5), **36** Gis (815,2), **40** A (905,7), **44** B (996,2), **45** Ais (1018,9), **49** H (1109,4).

Nagu näitest 6 ilmneb, esindab iga noodini-metus ainult ühte helikõrgust, kusjuures 12-helilise võrdtempereeritud häälestuse puhul enharmoniliselt võrdsed helid (näiteks *Des* ja *Cis*) on siin erineva kõrgusega.

4. Gioseffo Zarlino helisüsteem

Seoses laadiõpetusega on Descartes'i traktaadis mainitud 16. sajandi kuulsaimat itaalia muusika-teoreetikut Gioseffo Zarlino (1517–1590). Näidetes 7 ja 8 on kujutatud Zarlino helisüsteem sellisena, nagu see esineb tema teose „Le institutioni harmoniche“ esimeses ja kolmandas trükis (vastavalt aastatest 1558 ja 1573).

Nagu näitest 7 ilmneb, kasutab ta 1558. aasta väljaandes oktav (registrist olenemata) üheksat eri heli: 0 F (0,0), 9 G (203,8), 17 a (384,9), 22 B (498,1), 26 h (588,7), 31 C (701,9), 39 d (883,0), 40 D (905,7), 48 e (1086,8). Neist ainult üks on kahel, ühe kommaühiku võrra erineval kujul, nimelt d ja D. Heksahordid, mida neist helidest saab moodustada, on erineva ehitusega. *Hexachordum molle* ei vasta Descartes'i heksahordidele, sest siin on ut ja re vahel suur, re ja mi vahel aga väike täistoon: 0 F (0,0), 9 G (203,8), 17 a (384,9), 22 B (498,1), 31 C (701,9), 39 d (883,0).¹⁸ *Hexachordum naturale* seevastu arvatavasti vastab Descartes'i omadele. Kuigi re võib siin olla kas 39 d või 40 D, on tõenäolisem 39 d, sest siis tekib puhas kvint re-la (39–17). Viimane, *hexachordum durum* vastab kindlasti Descartes'i omadele.

Näites 8 1573. aasta väljaandest on oktav (registrist olenemata) ainult seitse diatoonilist heli: C–D–e–F–G–a–h, nagu see ilmneb seal näidatud keelepikkustest (180, 160, 155, 135, 120, 108, 96). Seetõttu ei ole *hexachordum molle* siin võimalik. *Hexachordum durum* vastab Descartes'i omadele, *hexachordum naturale* aga mitte.

5. Hothby, Zarlino ja Descartes'i heksahordide võrdlus

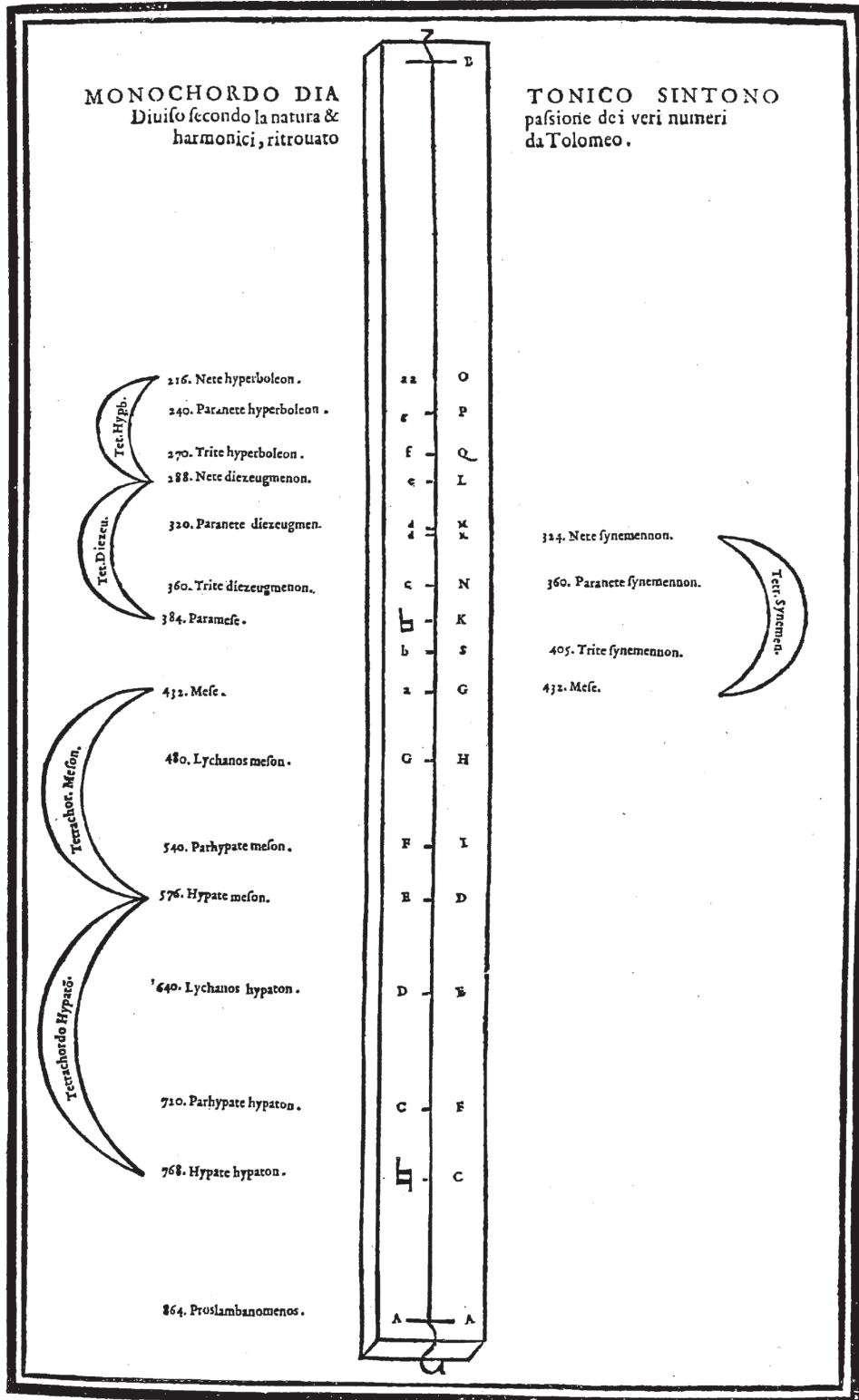
John Hothby heksahordid on sümmeetrilise ehitusega, koosnedes intervallidest suurusega 9, 9, 4, 9, 9 kommaühikut. Nagu eespool öeldud, moodustavad pütaagoriliku häälestuse tõttu tema heksahordides kõik helid osa katkematust kvindireast, mistõttu kõik kvindid ja kvardid (*ut–fa*, *ut–sol*, *re–sol*, *re–la*, *mi–la*) on loomulikud, tertsid (*ut–mi*, *re–fa*, *mi–sol*, *fa–la*) ja sekst *ut–la* aga pütaagorilikud, s.t. loomulikest ühe kommaühiku võrra erinevad.

Zarlino 1558. aasta väljaande *hexachordum molle* ja 1573. aasta väljaande *hexachordum naturale* on ebasümmeetrilise ehitusega, koosnedes intervallidest suurusega 9, 8, 5, 9, 8 kommaühikut. Selles on neli loomulikku kvarti või kvinti (*ut–fa*, *ut–sol*, *re–sol*, *mi–la*) ja üks ebapuhast kvint (*re–la*). Loomulikud on samuti kolm tertsi (*ut–mi*, *mi–sol*, *fa–la*) ja sekst *ut–la*, terts *re–fa* aga on pütaagorilik.

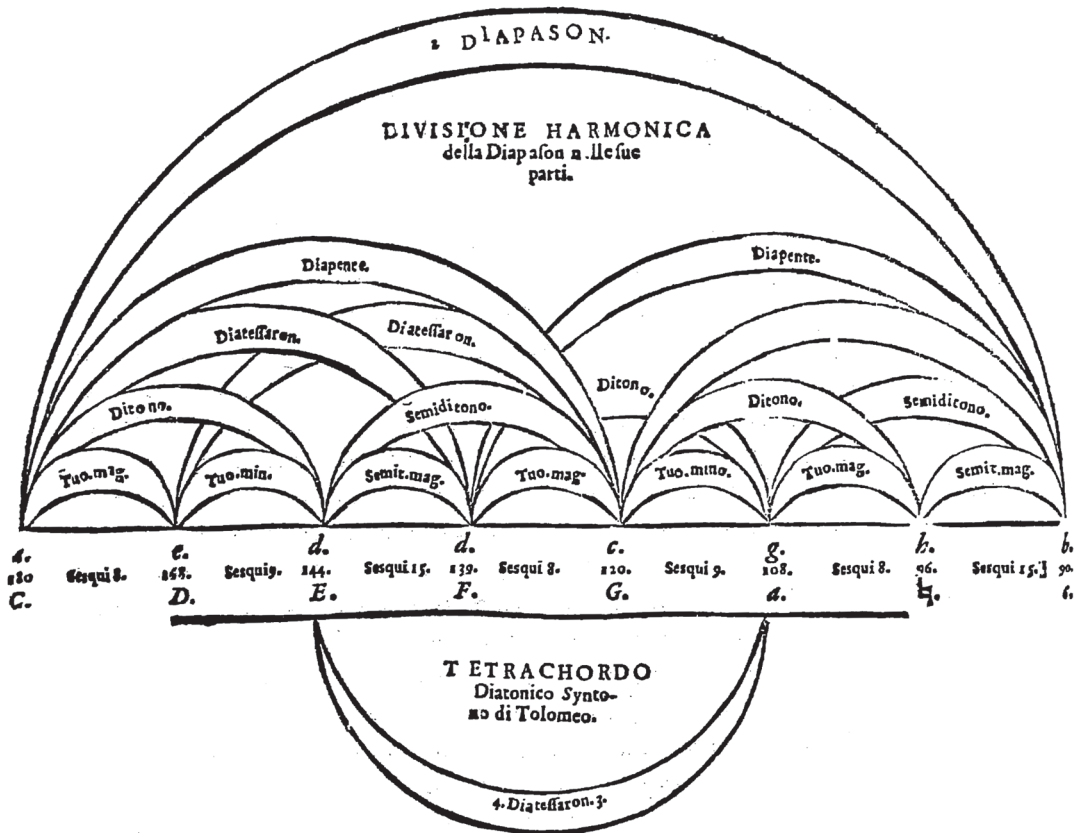
Descartes'i heksahordid nagu ka John Hothby omad on sümmeetrilise ehitusega, koosnedes intervallidest suurusega 8, 9, 5, 9, 8 kommaühikut.

¹⁸ La võib olla ka 40 D, kuid sel juhul tekiks fa ja la vahel pütaagorilik terts (18 kommaühikut).

Näide 7. Zarlino helisüsteem (1558) (Palisca 1968: XXI).



Näide 8. Zarlino helisüsteem (1573) (Palisca 1989: 261).



Kui Hothbyl on kõik kvindid ja kvardid loomulikud, siis Descartes'il kehtib see tertside (*ut–mi, re–fa, mi–sol, fa–la*) ja seksti *ut–la* kohta. Ainus eba-puhas intervall on 23 kommaühiku suurune kvart *re–sol* (nagu eespool öeldud, koosneb loomulik kvart 22 kommaühikust). Et saada *re* ja *sol*'i vahele loomulikku kvarti, tuleks võtta kas *re hexachordum durum*'ist või *sol hexachordum molle*'st, seega kasutada menetlust, mida ta ise kirjeldab järgmiselt (seoses laskuva kvindi *d–g* jagamisega kaheks tertsi; autori viidetele keelepikkuste kohta on nurksulgudes lisatud noodinimetused ja kaugus algusheli 0 C suhtes kommaühikutes):

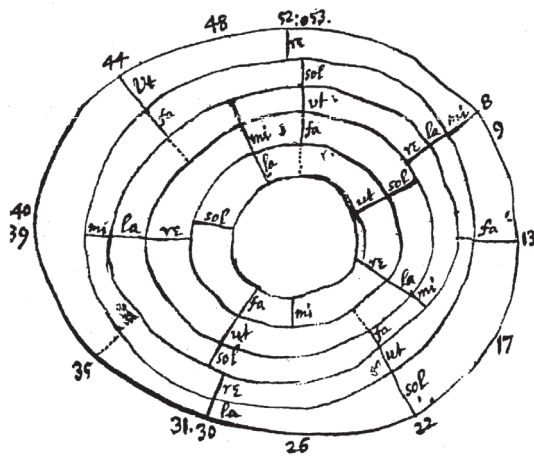
[---] Me ei saa [---] astmeliselt laskuda 480-lt [31 G] 324-le [8 d], tõstmata keskmist heli nii, et ta oleks 480 suhtes 384 [48 h] ja 324 suhtes 405 [44 B] [---] Kui soovime liikuda läbi heli 405, peame nihutama heli *g* skisma [s.t. ühe kommaühiku] võrra, nii et ta poleks mitte 480, vaid 486 [30 g]; kui me liigume läbi 384, peame muutma heli *d*; 324 asemel peab see olema 320 [9 D], ja seega väike terts kõrgem kui 384.¹⁹ (Descartes 1961: 35).

¹⁹ „[N]on possumus à termino 480 ad 324 per gradus ascendere, nisi etiam medium terminum ita efferamus, ut si respiciat 480 sit 384. si 324 sit 405 [---], hoc pacto, si velimus incedere per terminum 405, removebimus terminum G uno schismate, ut sit 486 non amplius 480. si vero incedamus per 384 mutabimus terminum D & erit 320 loco 324, atque ita distabit tertia minore à 384.” (Descartes 1650: 33).

6. Isaac Newton ja Descartes'i heksahordid

Ka inglise füüsik ja matemaatik Isaac Newton (1643–1727) oli huvitatud häälestusprobleemidest. Nii leidub tema 1665. aastast pärinevate märkmete hulgas näites 9 kujutatud diagramm.

Näide 9. Isaac Newtoni diagramm (Lindley 1987: 208).



Nagu märgib Mark Lindley viidatavas teoses, on see diagramm seotud eeltoodud näitega 1 Descartes'i traktaadist (mille esmatrükk ilmus teatavasti 1650. aastal). Kuid see erineb viimastest mitmes olulisel määral. Esiteks ei kujuta see mitte kolme, vaid viit heksahordi, ja teiseks

on Descartes'i keelepikkusi tähistavad numbrid asendatud siin 53-helilise võrdtempereeritud häälestuse kommaühikuid märkivate numbritega. Arvatavasti kujutab see diagramm Descartes'i traktaadist pärit eeltoodud näites 2 olevaid B-, F-, C-, G- ja D-heksahorde. Sel juhul vastavad diagrammi ülal olevad numbrid 0 [=] 53 helile C ja viis kontsentriselt paiknevat ringi eelnimetatud viiele Descartes'i heksahordile (väljastpoolt lugedes järjekorras B, F, C, G ja D), sest diagrammil on märgitud kõik viimastes leiduvad neliteist heli (0 C, 8 d, 9 D, 13 Es, 17 e, 22 F, 26 fis, 30 g, 31 G, 39 a, 40 A, 44 B, 48 h, 52 c). Peale nende leidub diagrammil veel heli 26 As. Seetõttu oletab Mark Lindley, et kujutatud on viit miksoliüüdia helirida (Lindley 1987: 206). Siiski tundub, et Newton lähtus eelkõige Descartes'i eelmainitud näitest.

7. Descartes'i heksahordid 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses

Näites 10 on kujutatud kõiki 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses võimalikke Descartes'i heksahorde, analoogiliselt näites 4 kujutatud John Hothby heksahordidega. Loetelu algul olev *hexachordum naturale* on lähtepunkt, millele järgnevad vaheldumisi 26 tõusva ja 26 laskuva kvindireana järjestatud heksahordi (viimaste järjekorranumbrid on miinusmärgiga). Nagu ka Hothby heksahordide puhul on siin igas järgmises reas alla kriipsutatud üks või kaks lisanduvat uut heli.

Näide 10. Descartes'i heksahordid 53-helilises võrdtempereeritud häälestuses.

0.	0 C (0,0)	8 d (181,1)	17 e (384,9)	22 F (498,1)	31 G (701,9)	39 a (883,0)
1.	31 G (701,9)	39 a (883,0)	48 h (1086,8)	0 C (0,0)	9 D (203,8)	17 e (384,9)
-1.	22 F (498,1)	30 g (679,2)	39 a (883,0)	44 B (996,2)	0 C (0,0)	8 d (181,1)
2.	9 D (203,8)	17 e (384,9)	26 fis (588,7)	31 G (701,9)	40 A (905,7)	48 h (1086,8)
-2.	44 B (996,2)	52 c (1177,4)	8 d (181,1)	13 Es (294,3)	22 F (498,1)	30 g (679,2)
3.	40 A (905,7)	48 h (1086,8)	4 cis (90,6)	9 D (203,8)	18 E (407,5)	26 fis (588,7)
-3.	13 Es (294,3)	21 f (475,5)	30 g (679,2)	35 As (792,5)	44 B (996,2)	52 c (1177,4)
4.	18 E (407,5)	26 fis (588,7)	35 gis (792,5)	40 A (905,7)	49 H (1109,4)	4 cis (90,6)
-4.	35 As (792,5)	43 b (976,5)	52 c (1177,4)	4 Des (90,6)	13 Es (294,3)	21 f (475,5)
5.	49 H (1109,4)	4 cis (90,6)	13 dis (294,3)	18 E (407,5)	27 Fis (611,3)	35 gis (792,5)
-5.	4 Des (90,6)	12 es (271,7)	21 f (475,5)	26 Ges (588,7)	35 As (792,5)	43 b (976,5)
6.	27 Fis (611,3)	35 gis (792,5)	44 ais (996,2)	49 H (1109,4)	5 Cis (113,2)	13 dis (294,3)
-6.	26 Ges (588,7)	34 as (769,8)	43 b (976,5)	48 Ces (1086,8)	4 Des (90,6)	12 es (271,7)
7.	5 Cis (113,2)	13 dis (294,3)	22 eis (498,1)	27 Fis (611,3)	36 Gis (815,2)	44 ais (996,2)

Näide 10. Järg

-7.	48 <i>Ces</i> (1086,8)	<u>3 des</u> (67,9)	12 <i>es</i> (271,7)	17 Fes (384,9)	26 <i>Ges</i> (588,7)	34 <i>as</i> (769,8)
8.	36 <i>Gis</i> (815,2)	44 <i>ais</i> (996,2)	0 his (0,0)	5 <i>Cis</i> (113,2)	<u>14 Dis</u> (317,0)	22 <i>eis</i> (498,1)
-8.	17 <i>Fes</i> (384,9)	<u>25 ges</u> (566,0)	34 <i>as</i> (769,8)	39 Heses (883,0)	48 <i>Ces</i> (1086,8)	3 <i>des</i> (67,9)
9.	14 <i>Dis</i> (317,0)	22 <i>eis</i> (498,1)	31 fisis (701,9)	36 <i>Gis</i> (815,2)	<u>45 Ais</u> (1018,9)	0 <i>his</i> (0,0)
-9.	39 <i>Heses</i> (883,0)	<u>47 ces</u> (1064,1)	3 <i>des</i> (67,9)	8 Eses (181,1)	17 <i>Fes</i> (384,9)	25 <i>ges</i> (566,0)
10.	45 <i>Ais</i> (1018,9)	0 <i>his</i> (0,0)	9 cisis (203,8)	14 <i>Dis</i> (317,0)	<u>23 Eis</u> (520,8)	31 <i>fisis</i> (701,9)
-10.	8 <i>Eses</i> (181,1)	<u>16 fes</u> (362,3)	25 <i>ges</i> (566,0)	30 Asas (679,2)	39 <i>Heses</i> (883,0)	47 <i>ces</i> (1064,1)
11.	23 <i>Eis</i> (520,8)	31 <i>fisis</i> (701,9)	40 gisis (905,7)	45 <i>Ais</i> (1018,9)	<u>1 His</u> (22,6)	9 <i>cisis</i> (203,8)
-11.	30 <i>Asas</i> (679,2)	<u>38 heses</u> (860,4)	47 <i>ces</i> (1064,1)	52 Deses (1177,4)	8 <i>Eses</i> (181,1)	16 <i>fes</i> (362,3)
12.	1 <i>His</i> (22,6)	9 <i>cisis</i> (203,8)	18 disis (407,5)	23 <i>Eis</i> (520,8)	<u>32 Fisis</u> (724,5)	40 <i>gisis</i> (905,7)
-12.	52 <i>Deses</i> (1177,4)	<u>7 eses</u> (158,5)	16 <i>fes</i> (362,3)	21 Geses (475,5)	30 <i>Asas</i> (679,2)	38 <i>heses</i> (860,4)
13.	32 <i>Fisis</i> (724,5)	40 <i>gisis</i> (905,7)	49 aisis (1109,4)	1 <i>His</i> (22,6)	<u>10 Cisis</u> (226,4)	18 <i>disis</i> (407,5)
-13.	21 <i>Geses</i> (475,5)	<u>29 asas</u> (656,6)	38 <i>heses</i> (860,4)	43 Ceses (976,5)	52 <i>Deses</i> (1177,4)	7 <i>eses</i> (158,5)
14.	10 <i>Cisis</i> (226,4)	18 <i>disis</i> (407,5)	27 eisis (611,3)	32 <i>Fisis</i> (724,5)	<u>41 Gisis</u> (928,3)	49 <i>aisis</i> (1109,4)
-14.	43 <i>Ceses</i> (976,5)	<u>51 deses</u> (1154,7)	7 <i>eses</i> (158,5)	12 Feses (271,7)	21 <i>Geses</i> (475,5)	29 <i>asas</i> (656,6)
15.	41 <i>Gisis</i> (928,3)	49 <i>aisis</i> (1109,4)	5 hisis (113,2)	10 <i>Cisis</i> (226,4)	<u>19 Disis</u> (430,2)	27 <i>eisis</i> (611,3)
-15.	12 <i>Feses</i> (271,7)	<u>20 geses</u> (452,8)	29 <i>asas</i> (656,6)	34 Heseses (769,8)	43 <i>Ceses</i> (976,5)	51 <i>deses</i> (1154,7)
16.	19 <i>Disis</i> (430,2)	27 <i>eisis</i> (611,3)	36 fisisis (815,2)	41 <i>Gisis</i> (928,3)	<u>50 Aisis</u> (1132,1)	5 <i>hisis</i> (113,2)
-16.	34 <i>Heseses</i> (769,8)	<u>42 ceses</u> (950,9)	51 <i>deses</i> (1154,7)	3 Eseses (67,9)	12 <i>Feses</i> (271,7)	20 <i>geses</i> (452,8)
17.	50 <i>Aisis</i> (1132,1)	5 <i>hisis</i> (113,2)	14 cisisis (317,0)	19 <i>Disis</i> (430,2)	<u>28 Eisis</u> (634,0)	36 <i>fisisis</i> (815,2)
-17.	3 <i>Eseses</i> (67,9)	<u>11 fesesis</u> (249,1)	20 <i>geses</i> (452,8)	25 Asasas (566,0)	34 <i>Heseses</i> (769,8)	42 <i>ceses</i> (950,9)
18.	28 <i>Eisis</i> (634,0)	36 <i>fisisis</i> (815,2)	45 gisisis (1018,9)	50 <i>Aisis</i> (1132,1)	<u>6 Hisis</u> (135,8)	14 <i>cisisis</i> (317,0)
-18.	25 <i>Asasas</i> (566,0)	<u>33 heseses</u> (747,2)	42 <i>ceses</i> (950,9)	47 Deseses (1064,1)	3 <i>Eseses</i> (67,9)	11 <i>feses</i> (249,1)
19.	6 <i>Hisis</i> (135,8)	14 <i>cisisis</i> (317,0)	23 disisis (520,8)	28 <i>Eisis</i> (634,0)	<u>37 Fisisis</u> (837,7)	45 <i>gisisis</i> (1018,9)
-19.	47 <i>Deseses</i> (1064,1)	<u>2 eseses</u> (45,3)	11 <i>feses</i> (249,1)	16 Geseses (362,3)	25 <i>Asasas</i> (566,0)	33 <i>heseses</i> (747,2)
20.	37 <i>Fisisis</i> (837,7)	45 <i>gisisis</i> (1018,9)	1 aisisis (22,6)	6 <i>Hisis</i> (135,8)	<u>15 Cisisis</u> (339,6)	23 <i>disisis</i> (520,8)
-20.	16 <i>Geseses</i> (362,3)	<u>24 asasas</u> (543,4)	33 <i>heseses</i> (747,2)	38 Ceseses (860,4)	47 <i>Deseses</i> (1064,1)	2 <i>eseses</i> (45,3)
21.	15 <i>Cisisis</i> (339,6)	23 <i>disisis</i> (520,8)	32 eisisis (724,5)	37 <i>Fisisis</i> (837,7)	<u>46 Gisisis</u> (1041,5)	1 <i>aisisis</i> (22,6)
-21.	38 <i>Ceseses</i> (860,4)	<u>46 deseses</u> (1041,5)	2 <i>eseses</i> (45,3)	7 Feseses (158,5)	16 <i>Geseses</i> (362,3)	24 <i>asasas</i> (543,4)
22.	46 <i>Gisisis</i> (1041,5)	1 <i>aisisis</i> (22,6)	10 <i>hisisis</i> (226,4)	15 <i>Cisisis</i> (339,6)	24 <i>Disisis</i> (543,4)	32 <i>eisisis</i> (724,5)
-22.	7 <i>Feseses</i> (158,5)	15 <i>geseses</i> (339,6)	24 <i>asasas</i> (543,4)	29 <i>Heseseses</i> (656,6)	38 <i>Ceseses</i> (860,4)	46 <i>deseses</i> (1041,5)
23.	24 <i>Disisis</i> (543,4)	32 <i>eisisis</i> (724,5)	41 <i>fisisis</i> (928,3)	46 <i>Gisisis</i> (1041,5)	2 <i>Aisisis</i> (45,3)	10 <i>hisisis</i> (226,4)
-23.	29 <i>Heseseses</i> (656,6)	37 <i>ceseses</i> (837,7)	46 <i>deseses</i> (1041,5)	51 <i>Eseseses</i> (1154,7)	7 <i>Feseses</i> (158,5)	15 <i>geseses</i> (339,6)
24.	2 <i>Aisisis</i> (45,3)	10 <i>hisisis</i> (226,4)	19 <i>cisisis</i> (430,2)	24 <i>Disisis</i> (543,4)	33 <i>Eisisis</i> (747,2)	41 <i>fisisis</i> (928,3)

-24.	51 <i>Eseseses</i> (1154,7)	6 <i>feseses</i> (135,8)	15 <i>geseses</i> (339,6)	20 <i>Asasasas</i> (452,8)	29 <i>Heseseses</i> (656,6)	37 <i>ceseses</i> (837,7)
25.	33 <i>Eisisis</i> (747,2)	41 <i>fisisisis</i> (928,3)	50 <i>gisisisis</i> (1132,1)	2 <i>Aisisis</i> (45,3)	11 <i>Hisisis</i> (249,1)	19 <i>cisisisis</i> (430,2)
-25.	20 <i>Asasasas</i> (452,8)	28 <i>heseseses</i> (634,0)	37 <i>ceseses</i> (837,7)	42 <i>Deseseses</i> (950,9)	51 <i>Eseseses</i> (1154,7)	6 <i>feseses</i> (135,8)
26.	11 <i>Hisisis</i> (249,1)	19 <i>cisisisis</i> (430,2)	28 <i>disisisis</i> (634,0)	33 <i>Eisisis</i> (747,2)	42 <i>Fisisisis</i> (950,9)	50 <i>gisisisis</i> (1132,1)
-26.	42 <i>Deseseses</i> (950,9)	50 <i>eseseses</i> (1132,1)	6 <i>feseses</i> (135,8)	11 <i>Geseseses</i> (249,1)	20 <i>Asasasas</i> (452,8)	28 <i>heseseses</i> (634,0)

Näites 10 kujutatud 53 heksahordi võib uute helide lisandumise seisukohalt liigitada kolme rühma. Esimese rühma moodustavad seitse esimest heksahordi (kuni järjekorranumbrini –3), kus igas järgmises heksahordis lisanduvad kaks uut nooti, nii nagu seda kirjeldab Descartes. Näites 11 on esitatud nende seitsme heksahordi helirida.

Selles helireas on kokku 18 heli. Võrreldes John Hothby 17-helilise helireaga on siin olulisi erinevusi. Esiteks on kõik diatoonilise C-duuri helid siin esindatud kahel, ühe kommaühiku võrra erineval kujul, ja teiseks puuduvad viis dieeside või bemolidega heli (*gis, dis, ais, as, ges*).

Teise rühma moodustavad järgmised 36 heksahordi (järjekorranumbriga 4 kuni –21). Siin lisandub igas reas ainult üks uus heli, kuid üks varasematest helidest muutub oma enharmooniliseks paariliseks, mida 53-helilises võrdtempeeritud häälestuses esindab sama heli, näiteks 35 *gis/As* (792,5). Nende nimetused on näites 10 trükitud poolrasvase kirjaga. Viimase noodina lisandub heksahordides 21 ja –21 üheaegselt heli 46 *Gisisis/deseses* (1041,5). Erinevalt eelnimetatud enharmoonilistest paaridest, mille helid on üks-

teisest vähendatud sekundi kaugusel, esindavad need kaks heli selliseid paare, mille helide vahele jääb kuuekordselt vähendatud kvint; näites 14 on need juhud märgitud tärniga (*). Selliste helide kaugused ülarea algushelist näitavad, et nad asuvad enam-vähem täpselt kahe 12-helilise võrdtempeeritud häälestuse heli vahel, nagu eelmainitud heli 46 *Gisisis/deseses* (1041,5). Sellest tuleneb ilmselt asjaolu, et kuuekordselt vähendatud kvint, mille helid moodustavad 12-helilise võrdtempeeritud häälestuse puhul enharmooniliselt väikese sekundi (sest $7 - 6 = 1$), tekib siin kahe praktiliselt samakõrguse heli vahel.

Kolmandas rühmas, alates 22. heksahordist enam uusi helisid ei tule, sest kõik helisüsteemi 53 heli on juba kasutusel.

Huvitav on võrrelda John Hothby kahteist heksahordi ka Descartes'i kolmeteistkümne esimese heksahordiga (kuni järjekorranumbrini –6). Erinevalt Hothby 17-helilisest helireast moodustub siin 24-heliline helirida (näide 12).

Selles helireas on kõik 12-helilise võrdtempeeritud häälestuse helid esindatud kahel kujul, ühe kommaühiku võrra erinevate paaridena, näi-

Näide 11. Seitsme esimese Descartes'i heksahordi helikoostis.

0 C (0,0), **4** *cis* (90,6), **8** *d* (181,1), **9** *D* (203,8), **13** *Es* (294,3), **17** *e* (384,9), **18** *E* (407,5), **21** *f* (475,5), **22** *F* (498,1), **26** *fis* (588,7), **30** *g* (679,2), **31** *G* (701,9), **35** *As* (792,5), **39** *a* (883,0), **40** *A* (905,7), **44** *B* (996,2), **48** *h* (1086,8), **52** *c* (1177,4).

Näide 12. Kolmeteistkümne esimese Descartes'i heksahordi helikoostis.

0 C (0,0), **4** *cis/Des* (90,6), **5** *Cis* (113,2), **8** *d* (181,1), **9** *D* (203,8), **12** *es* (271,7), **13** *dis/Es* (294,3), **17** *e* (384,9), **18** *E* (407,5), **21** *f* (475,5), **22** *F* (498,1), **26** *fis/Ges* (588,7), **27** *Fis* (611,3), **30** *g* (679,2), **31** *G* (701,9), **34** *as* (769,8), **35** *gis/As* (792,5), **39** *a* (883,0), **40** *A* (905,7), **43** *b* (976,5), **44** *ais/B* (996,2), **48** *h/Ces* (1086,8), **49** *H* (1109,4), **52** *c* (1177,4).

teks 52 c (1177,4) ja 0 C (0,0). Ülejäänud vahemaad helide vahel on kas kolm või neli kommaühikut, kusjuures viimasel juhul eelneb või järgneb vahe- maale enharmooniline paar (näiteks 0 C (0,0), 4 cis/ Des (90,6).

Näites 13 on kõik Descartes'i heksahordides leiduvad helid paigutatud tõusva ja laskuva kvindiringina ja näites 14 kromaatilisel tõusva helireana, analoogiliselt näidetega 5 ja 6.

Näide 13. Descartes'i heksahordide helid kvindiridadena.

0. 0 his/C (0,0), **1.** 31 fisis/G (701,9), **2.** 9 cisis/D (203,8), **3.** 40 gisis/A (905,7), **4.** 18 disis/E (407,5), **5.** 49 aisis/H (1109,4), **6.** 27 eisis/Fis (611,3), **7.** 5 hisis/Cis (113,2), **8.** 36 fisis/Gis (815,2), **9.** 14 cisis/Dis (317,0), **10.** 45 gisis/Ais (1018,9), **11.** 23 disisis/Eis (520,8), **12.** 1 aisis/His (22,6), **13.** 32 eisis/Fisis (724,5), **14.** 10 hisis/Cisis (226,4), **15.** 41 fisis/Gisis (928,3), **16.** 19 cisis/Disis (430,2), **17.** 50 gisis/Aisis (eseseses) (1132,1), **18.** 28 disisis/Eisis (heseses) (634,0), **19.** 6 Hisis/feseses (135,8), **20.** 37 Fisis/ceseses (837,7), **21.** 15 Cisis/geseses (339,6), **22.** 46 Gisis/deseses (1041,5), **23.** 24 Disisis/asasas (543,4), **24.** 2 Aisis/eseses (45,3), **25.** 33 Eisis/heseses (747,2), **26.** 11 feses/Geseses (Hisis) (249,1).

0. 0 his/C (0,0), **-1.** 22 eis/F (498,1), **-2.** 44 ais/B (996,2), **-3.** 13 dis/Es (294,3), **-4.** 35 gis/As (792,5), **-5.** 4 cis/Des (90,6), **-6.** 26 fis/Ges (588,7), **-7.** 48 h/Ces (1086,8), **-8.** 17 e/Fes (384,9), **-9.** 39 a/Heses (883,0), **-10.** 8 d/Eses (181,1), **-11.** 30 g/Asas (679,2), **-12.** 52 c/Deses (1177,4), **-13.** 21 f/Geses (475,5), **-14.** 43 b/Ceses (976,5), **-15.** 12 es/Feses (271,7), **-16.** 34 as/Heseses (769,8), **-17.** 3 des/Eseses (67,9), **-18.** 25 ges/Asasas (566,0), **-19.** 47 ces/Deseses (1064,1), **-20.** 16 fes/Geseses (362,3), **-21.** 38 heses/Ceseses (860,4), **-22.** 7 eses/Feseses (158,5), **-23.** 29 asas/Heseseses (656,6), **-24.** 51 deses/Eseseses (1154,7), **-25.** 20 geses/Asasasas (452,8), **-26.** 42 ceses/Deseseses (Fisisis) (950,9).

Näide 14. Descartes'i heksahordide helikoostis.

0 his/C (0,0) [0., 1., -1., 8., 9., 10.], **1** aisis/His (22,6) [11., 12., 13., 20., 21., 22.], **2** Aisis/eseses* (45,3) [-19., -20., -21., 23., 24., 25.], **3** des/Eseses (67,9) [-7., -8., -9., -16., -17., -18.], **4** cis/Des (90,6) [3., 4., 5., -4., -5., -6.], **5** hisis/Cis (113,2) [6., 7., 8., 15., 16., 17.], **6** Hisis/feseses* (135,8) [18., 19., 20., -24., -25., -26.], **7** eses/Feseses (158,5) [-12., -13., -14., -21., -22., -23.], **8** d/Eses (181,1) [0., -1., -2., -9., -10., -11.], **9** cisis/D (203,8) [1., 2., 3., 10., 11., 12.], **10** hisis/Cisis (226,4) [13., 14., 15., 22., 23., 24.], **11** feses/Geseses (Hisis) (249,1) [-17., -18., -19., 25., 26., -26.], **12** es/Feses (271,7) [-5., -6., -7., -14., -15., -16.], **13** dis/Es (294,3) [-2., -3., -4., 5., 6., 7.], **14** cisis/Dis (317,0) [8., 9., 10., 17., 18., 19.], **15** Cisis/geseses* (339,6) [20., 21., 22., -22., -23., -24.], **16** fes/Geseses (362,3) [-10., -11., -12., -19., -20., -21.], **17** e/Fes (384,9) [0., 1., 2., -7., -8., -9.], **18** disis/E (407,5) [3., 4., 5., 12., 13., 14.], **19** cisis/Disis (430,2) [15., 16., 17., 24., 25., 26.], **20** geses/Asasasas (452,8) [-15., -16., -17., -24., -25., -26.], **21** f/Geses (475,5) [-3., -4., -5., -12., -13., -14.], **22** eis/F (498,1) [0., -1., -2., 7., 8., 9.], **23** disisis/Eis (520,8) [10., 11., 12., 19., 20., 21.], **24** Disisis/asasas* (543,4) [-20., -21., -22., 22., 23., 24.], **25** ges/Asasas (566,0) [-8., -9., -10., -17., -18., -19.], **26** fis/Ges (588,7) [2., 3., 4., -5., -6., -7.], **27** eisis/Fis (611,3) [5., 6., 7., 14., 15., 16.], **28** disisis/Eisis (heseses) (634,0) [17., 18., 19., -25., 26., -26.], **29** asas/Heseseses (656,6) [-13., -14., -15., -22., -23., -24.], **30** g/Asas (679,2) [-1., -2., -3., -10., -11., -12.], **31** fisis/G (701,9) [0., 1., 2., 9., 10., 11.], **32** eisis/Fisis (724,5) [12., 13., 14., 21., 22., 23.], **33** Eisis/heseses* (747,2) [-18., -19., -20., 24., 25., 26.], **34** as/Heses (769,8) [-6., -7., -8., -15., -16., -17.], **35** gis/As (792,5) [-3., -4., -5., 4., 5., 6.], **36** fisis/Gis (815,2) [7., 8., 9., 16., 17., 18.], **37** Fisis/ceseses* (837,7) [19., 20., 21., -23., -24., -25.], **38** heses/Ceseses (860,4) [-11., -12., -13., -20., -21., -22.], **39** a/Heses (883,0) [0., 1., -1., -8., -9., -10.], **40** gisis/A (905,7) [2., 3., 4., 11., 12., 13.], **41** fisis/Gisis (928,3) [14., 15., 16., 23., 24., 25.], **42** ceses/Deseseses (Fisisis) (950,9) [-16., -17., -18., -25., 26., -26.], **43** b/Ceses (976,5) [-4., -5., -6., -13., -14., -15.], **44** ais/B (996,2) [-1., -2., -3., 6., 7., 8.], **45** gisis/Ais (1018,9) [9., 10., 11., 18., 19., 20.], **46** Gisis/deseses* (1041,5) [21., 22., 23., -21., -22., -23.], **47** ces/Deseses (1064,1) [-9., -10., -11., -18., -19., -20.], **48** h/Ces (1086,8) [1., 2., 3., -6., -7., -8.], **49** aisis/H (1109,4) [4., 5., 6., 13., 14., 15.], **50** gisis/Aisis (eseseses) (1132,1) [16., 17., 18., 25., 26., -26.], **51** deses/Eseseses (1154,7) [-14., -15., -16., -23., -24., -25.], **52** c/Deses (1177,4) [-2., -3., -4., -11., -12., -13.].

Näites 14 on nurksulgudes märgitud, millistes heksahordides sisaldub vastav heli. Nagu siit ilmneb, kuulub iga heli kuude erinevasse heksahordi, näiteks kuulub heli 0 *his/C* (0,0) heksahordidesse järjekorranumbriga 0, 1, -1, 8, 9 ja 10. Lisaks kahel eri kujul esinevatele nootidele enharmoonilistes paarides ja eelmainitud kuuekordselt vähendatud kvindi paaridele, võib mõni heli esineda isegi kolmel eri kujul, näiteks 11 *feses/Geseses* (*Hisisis*), sest siin on ühendatud tavaline enharmooniline paar kuuekordselt vähendatud kvindiga (antud juhul *Hisisis-feses*).

* * *

Teoses „*Regulae ad Directionem Ingenii*” väidab Descartes: „Otsides otseteed tõe juurde, ei peaks me tegelema ühegi asjaga, mille kohta meil pole aritmeetilise või geomeetrilise tõestusega võrd-

set selgust”²⁰ (Augst 1965: 124). Tema samaaegselt Johannes Kepleri „*Harmonices mundi*” ilmumisega (1619) valminud „*Compendium musicae*”, milles puudub isegi harmoonia mõiste, „maailmaharmonia” rääkimata, esindab aga Keplerist radikaalselt erinevat mõtteviisi. Kepleri nimetatud teoses esitatud õpetus „maailmaharmonia” lähtub nn. spekulatiivses muusikateoorias (vt. Riethmüller 1990) Pythagorase päevist kuni keskajani valitsenud „sfääride harmoonia” ideest. Seevastu Descartes’i „*Compendium*”, mis algab sõnadega „*Hujus objectum est sonus*” („Selle [s.t. muusika] objektiks on heli”; Descartes 1650: 5, Descartes 1961: 6), tähistab Johannes Lohmanni sõnul uusaegse teadvuse teket: „[S]elles ei tõuse mitte ainult esmakordselt uusaegses tähenduses otsustavalt esile objekti mõiste, vaid sellega on tehtud ühtlasi ka otsustav samm selle tähtsa mõiste rakendamiseks” (Lohmann 1979: 82).

²⁰ „[S]ed tantummodo rectum veritatis iter quaerentes circa nullum objectum debere occupari, de quo non possint habere certitudinem Arithmetice et Geometricis demonstrationibus aequalem.” (Descartes 1701: 5).

Kirjandus

Augst, Bertrand 1965. Descartes's Compendium on Music. – *Journal of the History of Ideas* 26/1, lk. 119–132.

Descartes, René 1650. *Renati Des-Cartes Musicæ Compendium*. Utrecht: Trajecti ad Rhenum.

Descartes, René 1701. *Renati Des-Cartes Opuscula posthuma, physica et mathematica*. Amstelodami: Janssonio Waesbergios.

Descartes, René 1961. *Compendium of Music*. Trans. Walter Robert, Introduction and Notes by Charles Kent, *Musicological Studies and Documents* 8, [Rome]: American Institute of Musicology.

Hauptmann, Moritz 1853. *Die Natur der Harmonik und Metrik*. Leipzig: Breitkopf & Härtel.

Holder, William 1694. *A Treatise of the Natural Grounds and Principles of Harmony*. London: J. Heptinstall.

Humal, Mart 2009. Kommentaar Oettingeni ortotoonooniumi häälestuse kohta. – *Res Musica* 1, lk. 103–108.

Lindley, Mark 1987. Stimmung und Temperatur. – *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 6. *Hören, Messen und Rechnen in der frühen Neuzeit*. Hrsg. Frieder Zaminer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, lk. 109–331.

Lohmann, Johannes 1979. Descartes' „Compendium musicae“ und die Entstehung des neuzeitlichen Bewußtseins. – *Archiv für Musikwissenschaft* 36/2, lk. 81–104.

Palisca, Claude V. 1968. Introduction. – Gioseffo Zarlino. *The Art of Counterpoint*. Trans. Guy A. Marco, New Haven and London: Yale University Press, lk. XXI.

Palisca, Claude V. 1989. Die Jahrzehnte um 1600 in Italien. – *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 7. *Italienische Musiktheorie im 16. und 17. Jahrhundert*. Hrsg. Frieder Zaminer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, lk. 221–306.

Rempp, Frieder 1989. Elementar- und Satzlehre vom Tinctoris bis Zarlino. – *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 7. *Italienische Musiktheorie im 16. und 17. Jahrhundert*. Hrsg. Frieder Zaminer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, lk. 39–220.

Riethmüller, Albrecht 1990. Probleme der spekulativen Musiktheorie im Mittelalter. – *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 3. *Rezeption des antiken Fachs im Mittelalter*. Hrsg. Frieder Zaminer und Thomas F. Ertelt, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, lk. 163–201.

Seidel, Wilhelm 1986. Französische Musiktheorie im 16. und 17. Jahrhundert. – *Geschichte der Musiktheorie*, Bd. 9. *Entstehung nationaler Traditionen: Frankreich, England*. Hrsg. Frieder Zaminer, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, lk. 1–140.

The Acoustical Structure of René Descartes's Hexachords

Mart Humal

As we know, the medieval system of solmization is based on hexachords which correspond to the first six degrees of the modern major key, for example, *C–D–E–F–G–A*. Its tones have been designated as solmization syllables *ut–re–mi–fa–sol–la*. Two such hexachords – *c–a* (*Hexachordum naturale*) and *g–e* (*Hexachordum durum*) – are possible in the diatonic scale. Later, one more hexachord – *f–d* (*Hexachordum molle*) – was added. If the range of a melody exceeded the hexachord, mutations – transitions from one hexachord to another – were used for its solmization.

In this study, following Isaac Newton's example, the various intervals and degrees of the hexachord are compared by means of units of the 53-division of the octave, having the size of 22.6 cents, which will be referred to as a comma unit (CU). This tuning contains practically pure fifths and thirds, the latter owing to the fact that the eighth pure fifth (815.64 cents) is only 1.95 cents larger than the natural minor sixth (813.69 cents). Therefore, all the tones of the 53-division can be designated by means of enharmonic pairs, for example *b sharp/C*, where *C* is identical to *b sharp*, the major third of *G sharp*.¹

The French philosopher and mathematician René Descartes (1596–1650) wrote in 1618, as his first completed work, the Latin treatise *Compendium musicae*. Hexachords are dealt with in the largest chapter of Descartes's treatise, entitled "The Steps or Musical Tones". According to him, the interval *ut* to *re* must always be a minor whole-tone (9:10), *re* to *mi* a major whole-tone (8:9), *mi* to *fa* a major semitone (15:16), *fa* to *sol* a major whole-tone, and finally *sol* to *la* a minor whole-tone; see Example 1 (Näide 1). In the case of mutation from *Hexachordum molle* to *Hexachordum naturale* or from *Hexachordum naturale* to *Hexachordum durum*, two of the notes are changed and four notes remain of those that were in the previous hexachord. In the case of mutation from *Hexachordum molle* to *Hexachordum durum*, two more notes of the original four will be changed. In Example 2 (from Descartes's treatise), two new hexachords are added to the three traditional ones, namely the *B-* and *D-*hexachords. Of these, the former has no common tone with *Hexachordum durum*, nor the latter with *Hexachordum molle*.

Among the notes of the English physicist and mathematician Isaac Newton dated 1665, there is the diagram presented in Example 9, which probably represents the *B-*, *F-*, *C-*, *G-* and *D-*hexachords outlined in Example 2. In these, Descartes's figures marking string lengths are replaced by figures marking the CUs of the 53-division.

Example 10 outlines all the Descartes hexachords possible in the 53-division. In terms of the appearance of new pitches, these hexachords can be divided into three groups. The first group consists of the first seven hexachords (up to the order number –3), where each subsequent one contains two new pitches, as described by Descartes. The second group is made up of the subsequent 36 hexachords (with order numbers 4 to –21). Here each subsequent hexachord contains only one new pitch. However, one of the pitches present in the previous hexachord will be changed to its enharmonic counterpart, represented in the 53-division by the same pitch. In the third group, beginning with hexachord 22, no new pitches will appear, because all the 53 pitches of this division are already in use.

¹ The use of note names follows here the example of the 19th-century German music theorist Moritz Hauptmann, in whose treatise *Die Natur der Harmonik und Metrik* (1853) the primes and fifths of the main triads in a major key (tonic, dominant and subdominant) are marked with upper-case letters, and their thirds with lower-case letters.